# משפט

נניח ש דיפרנציאבילית ב ושהפונקציות כולן גזירות ב ומקיימות . אזי הפונקציה גזירה ב ומתקיים

אם f גזירה ב ו לכל אזי f קבועה

# משפט

יהי תחום(ז"א קבוצה פתוחה וקשירה). אם מקיימת לכל ולכל אזי f קבועה בD.

## דרך ההוכחה

נבנה בין כל שתי נקודות בתחום מסילה המורכבת מקטעים המקבילים לצירים. על כל קטע כזה הנגזרת על אותו ציר מתלכדת עם ולכן הפונקציה קבועה באותו קטע, ולכן היא קבועה על כל המסילה, ולכן ערך הפונקציה בשתי הנקודות שווה.

# שאלה

נניח ש ושכל הנגזרות החלקיות של f קיימות ורציפות בD. נניח בנוסף ש לכל . האם אפשר להסיק שf לא תלויה ב.

## תשובה – לא! דוגמה:

, כלומר המישור חוץ מהחלק החיובי של ציר הX. נגדיר  
. הפונקציה רציפה בD, ו.

אם f אינה תלויה בy אזי לכל

# הגדרה

תהי גזירה בסביבת . אזי מוגדרת בסביבת ולכן יתכן שקיימות לה נגזרות חלקיות לפי x וy באותה סביבה. נסמן*(אם זה קיים). באופן דומה:*

*באותו אופן נגדיר:*

# שאלה

נניח שבנסיבות אלה קיימות . האם הם חייבים להיות שווים?

## דוגמה(מקרה שכן)

## דוגמה(מקרה שלא)

# משפט

אם קיימות בסביבת ורציפות ב אזי

## הוכחה

עבור נגדיר .

נתבונן ב המוגדרת עבור ב וגזירה שם עם נגזרת . שימו ♥ לכך ש  
לפי משפט לגרנז' קיים כך ש  
מכאן: . נגדיר . לפי משפט לגרנג' קיים כך ש.

*באופן דומה אפשר להוכיח שקיימות כך ש:*

*וקיבלנו שוויון*

# משפט

נניח שf מוגדרת בסביבת ומקיימת התנאים הבאים:

1. קיימות הנגזרות החלקיות בסביבת
2. קיימת בסביבת הנגזרת החלקית המעורבת והיא רציפה ב

אזי קיימת ו.

## הוכחה

נגדיר כמו בהוכחה הקודמת. לפי מה שהוכחנו שם .

# משפט

תהי f רציפה במלבן אזי רציפה בקטע

## הוכחה

יהי . קיים כך שאם . אזי עבור

## טענה

אם  *ו אזי . אמנם,*

# משפט(לייבניץ)

תהי f מוגדרת במלבן ונניח ש:

1. *לכל , הינה פונקציה רציפה של x בקטע*
2. *קיימת הנגזרת החלקית בכל S ורציפה שם*

*אזי גזירה ב ומתקיים:*